1 Aufgabe

Eine Fallschirmspringerin der Masse m (inkl. Ausruestung) springt aus dem Flugzeug und fliegt im freien Fall nach unten. Gebremst wird sie von der Luftreibung, die Newtonschen Charakter hat. Der Luftreibungskoeffizient sei mit k bezeichnet.

Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Fallschirmspringerin auf und loesen Sie sie! Berechnen Sie wie die Maximalgeschwindigkeit der Fallschrimspringerin fuer $t \to \infty$.

2 Loesung

Auf die Fallschirmspringerin wirkt zum einen die Gravitationskraft $\overrightarrow{F_G}$ der Erde, der wir ein negatives Vorzeichen geben wollen. Es gilt also $\overrightarrow{F_G} = -m\overrightarrow{g}$. Die Gravitationskraft wird durch die Reibungskraft $\overrightarrow{F_R}$ mit Newtonschem Charakter geschwaecht, weshalb die Reibung ein positives Vorzeichen hat, da diese der Gravitationskraft entgegen wirkt. Fuer die Reibungskraft gilt $\overrightarrow{F_R} = k\overrightarrow{v}^2$.

Insgesamt gilt also:

$$\overrightarrow{F_{ges}} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_R}$$

Dieses Problem ist eindimensional, kann also auch ohne Vektoren in Form der Betraege geschrieben werden als:

$$F_{ges} = -mg + k \cdot v(t)^2 = m \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

Durch Integration koennen wir auf $v(t)$ schliessen. Dazu ist es allerdings ersteinmal notwendig die Gleichung umzusortieren.

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= -mg + k \cdot v(t)^2 \\ \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= -g\left(1 + \frac{k}{mg} \cdot v(t)^2\right) \\ \frac{\mathrm{d}v(t)}{1 + \frac{k}{mg} \cdot v(t)^2} &= -g \cdot \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Um diese Gleichung integrieren zu koennen, bedienen wir uns der Partialbruchzerlegung. Es gilt die Formel:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + (ax)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}ax}{1 + (ax)^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{atan}(ax)$$

Wenden wir dies nun auf unsere Gleichung an, ergibt sich die gesuchte Loesung $v(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{mg}}} \int_{v(0)=0}^{v(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{k}{mg}} v(t)}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot v(t)\right)^2} \right) &= -g \int_0^t \mathrm{d}t \\
\operatorname{atanh}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot v(t)\right) &= -gt \cdot \sqrt{\frac{k}{mg}} \\
v(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh\left(g\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot t\right) \\
&= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t\right)
\end{aligned}$$

Fuer die maximale Geschwindigkeit der Fallschirmspringerin gilt nun:

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$$