

1 Aufgabe

Eine senkrecht startende Rakete der Anfangsmasse m_0 stoest pro Zeiteinheit die Gasmenge $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ mit der Geschwindigkeit v_e relativ zur Rakete aus. Die Gravitationskraft soll dabei konstant angenommen werden, d.h. wir fliegen nicht allzu weit ins All und die Luftreibung wird vernachlaessigt, d.h. wir sind schnell aus der Atmosphaere raus.

Gesucht ist die Bewegungsgleichung fuer die Geschwindigkeit der Rakete sowie deren Loesung. Berechnen Sie daraus die Steighoehe als Funktion der Zeit.

2 Loesung

Der Impuls der Rakete zum Zeitpunkt t laesst sich schreiben als

$$p(t) = m(t) \cdot v(t)$$

Einen kleinen Zeitpunkt spaeter hat die Rakete an Geschwindigkeit gewonnen und etwas an Treibstoff verloren. Dieser verlorene Treibstoff traegt jedoch zum Gesamtimpuls bei, muss also auch beruecksichtigt werden. Es gilt dann:

$$p(t + \Delta t) = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m \cdot v'$$

Es bezeichnet dabei v' die Geschwindigkeit der ausgestroemten Gase relativ zur Erde.

Für die Differenz des Impulses ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta p &= p(t + \Delta t) - p(t) \\ &= (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m \cdot v' - mv \\ &= mv + m\Delta v - \Delta mv - \Delta m\Delta v + \Delta mv' - mv \\ &= m\Delta v + \Delta m(v' - v) - \Delta m\Delta v \\ &= m\Delta v + \Delta mv_e - \Delta m\Delta v \end{aligned}$$

Es kann dabei $\Delta m\Delta v$ vernachlaessigt werden, da diese Groesse verschwindend klein ist. Dividiert man nun durch Δt ergibt sich die Aenderung des Gesamtimpulses:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} v_e$$

Es ist die zeitliche Aenderung des Gesamtimpulses gleich der Kraft, die auf die Rakete einwirkt. Man kann also schreiben:

$$F_G = \frac{dp}{dt} = -mg$$

wobei F_G die Gewichtskraft bezeichnet. Fuer die Aenderung des Impulses gilt:

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v_e \frac{dm}{dt}$$

wobei v_e die Ausstroemgeschwindigkeit der Gase relativ zur Rakete darstellt und diese, gemaess der Aufgabenstellung, zeitlich konstant ist.

Man erhaelt also folgende Gleichung:

$$m \frac{dv}{dt} + v_e \frac{dm}{dt} = -mg$$

Separiert man dies nun nach den Variablen und integriert daraufhin, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{v=0}^{v(t)} dv + v_e \int_{m_0}^{m(t)} \frac{1}{m} dm &= -g \int_{t=0}^t dt \\ v(t) + v_e (\ln(m(t)) - \ln(m_0)) &= -gt \\ v(t) + v_e \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) &= -gt \end{aligned}$$

Damit ergibt sich fuer $v(t)$:

$$v(t) = v_e \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

Um die Steighoehe $s(t)$ zu berechnen muss $v(t)$ nun noch von $t = 0$ bis t integriert werden. Es gilt also:

$$\begin{aligned} s(t) &= v_e \int_{t=0}^t \ln\left(\frac{m_0}{m(t')}\right) dt' - g \int_{t=0}^t t' dt' \\ &= v_e \int_{t=0}^t \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m \cdot t}\right) dt' - g \int_{t=0}^t t' dt' \end{aligned}$$

Nun substituieren wir $m_0 - \Delta m \cdot t = u$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\Delta m \\ dt &= -\frac{du}{\Delta m} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{v_e}{\Delta m} \int_{t=0}^t \ln\left(\frac{m_0}{u}\right) du - g \int_{t=0}^t t' dt' \\ &= -\frac{v_e}{\Delta m} u \left(\ln\left(\frac{m_0}{u}\right) + 1 \right) - \frac{1}{2}gt^2 + C \end{aligned}$$

Nun muessen wir nur noch Resubstituieren:

$$s(t) = -\frac{v_e}{\Delta m}(m_0 - \Delta m \cdot t) \left(\ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m \cdot t} \right) + 1 \right) - \frac{1}{2}gt^2 + C$$

An dieser Stelle interessiert uns die Integrationskonstante C , welche wir bei den anderen Integrationen oben weggelassen haben. Allerdings muessen wir bei der Gleichung fuer die Steighoehe beruecksichtigen, dass die Rakete bei $t = 0$ am Boden steht, also $s(0) = 0$ gilt. Es gilt also:

$$s(0) = -\frac{v_e}{\Delta m}m_0 + C = 0$$

$$C = \frac{v_e}{\Delta m}m_0$$

Damit ergibt sich fuer die Steighoehe:

$$s(t) = -\frac{v_e}{\Delta m}(m_0 - \Delta m \cdot t) \left(\ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m \cdot t} \right) + 1 \right) - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_e}{\Delta m}m_0$$

$$= \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m \cdot t} \right) \left(-\frac{v_e}{\Delta m}m_0 + v_e \cdot t \right) + v_e \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$